Aula 31

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em I.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem **homogéneas**

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y,$$

com $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em I.

Teorema: Dada uma equação diferencial ordinária, escalar de primeira ordem, linear

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a solução geral é dada por

$$y(t) = \frac{C}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) b(t) dt,$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e um factor integrante $\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}$.
A solução do problema de Cauchy, com condição inicial $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{y_0}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^{t} \mu(s) b(s) ds \\ &= y_0 \, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)dr} b(s) ds. \end{aligned}$$